Théorie de Betz (1919)

La théorie de Betz (dérivée des travaux de Froude) est une approche simplificatrice découverte en 1919 par Albert Betz. Elle donne la quantité maximale d'énergie cinétique que l'on peut extraire d'un flux d'air dans un domaine ouvert, indépendamment de l'éolienne utilisée.

Hypothèses

- On considère l'écoulement incompressible et stationnaire, et on raisonne en 1D par tranches uniformes.
- On considère que l'air qui interagit avec le disque hélice de l'éolienne est constitué d'un cylindre à l'infini amont, et d'un cylindre à l'infini aval.
- On néglige l'interaction du vent environnant avec le sillage ainsi défini.

Développement de la théorie

Si l'on se penche sur le flux d'air cylindrique qui arrive sur les pales d'une éolienne en fonctionnement, on constate qu'il s'élargit et ralentit à sa traversée. On note V_1 la vitesse moyenne de l'écoulement à l'infini amont de l'éolienne, **c'est-à-dire la vitesse du vent**, et S_1 la section du cylindre correspondant. On note V,S ces mêmes grandeurs à la traversée de pales de l'éolienne, et V_2,S_2 leur valeur à l'infini aval après la traversée de l'éolienne. On appelle enfin P la puissance recueillie par l'éolienne sur l'écoulement, ρ la valeur constante et stationnaire de l'air, et Q le débit.

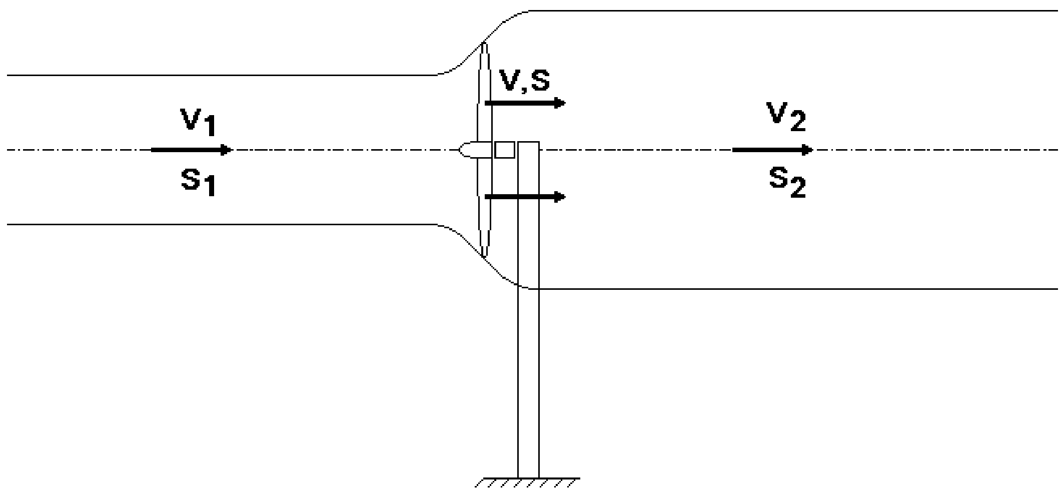

Figure 1 : Ecoulement d'air à la traversée des pales d'une éolienne à axe horizontal, vue en coupe

Le théorème d'Euler nous donne la force exercée par l'éolienne sur l'air en mouvement :

$$F = Q.(V_1 - V_2) = \rho.S.V.(V_1 - V_2)$$

Cette force exercée par le disque hélice se déplace à une vitesse V par rapport aux molécules de l'air, et développe ainsi une puissance :

$$P = F.V = \rho.S.V^2(V_1 - V_2) = Q.V.(V_1 - V_2)$$

Cette puissance est par ailleurs égale à la variation d'énergie cinétique de la masse d'air qui traverse par seconde l'éolienne :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.Q.(V_1^2 - V_2^2) = Q.\frac{(V_1 + V_2)}{2}.(V_1 - V_2)$$

L'égalité des deux grandeurs P et dE/dt impose :

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

En reportant cette dernière relation dans l'expression de P, on arrive à:

$$P = \frac{1}{4}\rho.S.\left(V_1^2 - V_2^2\right)\left(V_1 + V_2\right)$$

Cette fonction P admet un maximum lorsque $V_2 = V_1/3$, autrement dit lorsque l'éolienne ralentit la vitesse du vent d'un tiers au niveau de son hélice, et donc deux tiers à l'infini aval. La puissance P_{max} interceptée vaut alors :

$$P_{max} = \frac{8}{27}.\rho.S.V_1^3 = \frac{16}{27}\left(\frac{1}{2}.\rho.S.V_1^3\right) = \frac{16}{27}\left(puissance\_incidente\right).$$

16/27=0.593 est la fameuse limite de Betz, théoriquement indépassable. Dans la pratique, les éoliennes <u>les plus grandes et les mieux conçues</u> ne dépassent pas 60 à 80% de cette limite. Les éoliennes de petite taille que l'on trouve dans l'industrie sont même plus souvent voisines de 50%, voire même 30%.

Si on note $v = V_1 - V$ la vitesse induite axiale au niveau du disque hélice, C_h le coefficient de poussée défini par $C_h = F/(1/2.\rho.S.V_1^2)$, et η_{th} le rendement atteignable défini par $\eta_{th} = P/(1/2.\rho.S.V_1^3)$, on peut tracer le graphe suivant qui résume la théorie de Betz:

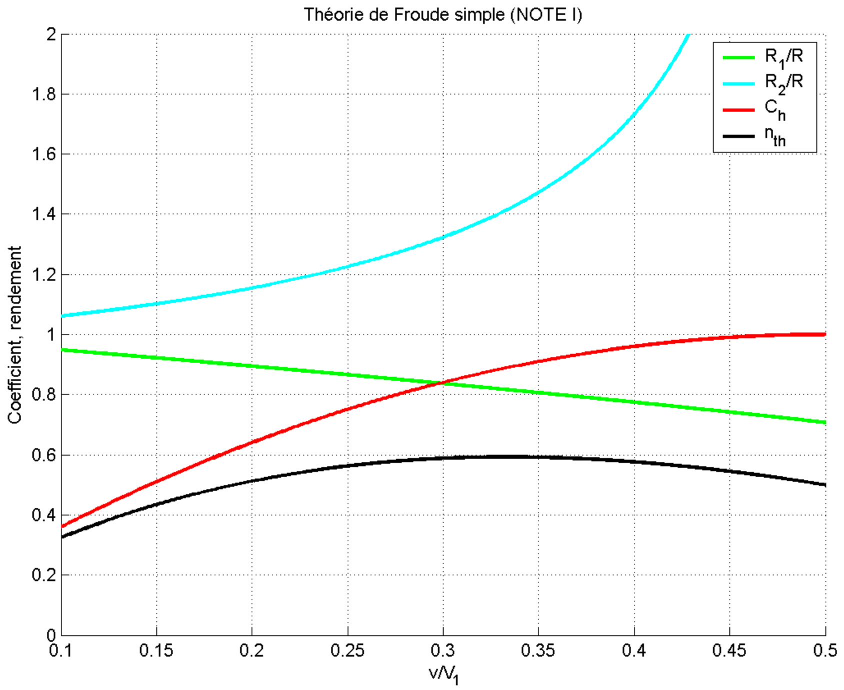

Figure 2 : Les grandeurs données par la théorie de Betz : rayons R1, R2, coefficient de poussée et rendement, le tout en fonction de la vitesse induite axiale v, qui matérialise le freinage du vent à la traversée du disque hélice.

On note que le coefficient de résistance de l'hélice dans le vent est maximal et égal à 1 lorsque le vent est diminué de moitié au niveau de l'hélice, et que ce coefficient est égal à 0.89 au point optimum où le vent est diminué d'un tiers.

Nicolas Andreau, avril 2011